Q, Z, N ...... $, 2=\{\emptyset, 1\}$ $, 1=\{\emptyset\}$ $, 0=\emptyset=\{\}$

اعداد شمارش پذیر
شمارش ناپذیر

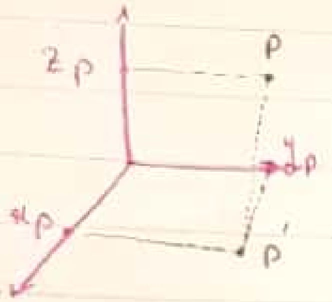
R: تمام اعداد حقیقی است ←

پلاک ها

* هر نقطه ای که بتوان بر روی صفحه مختصات نمایش داد نقطه ای در صفحه است. هر نقطه که بر روی صفحه مختصات باشد یک بعدی است (نقطه ای) اگر جسمی ضخامت نداشته باشد دو بعدی است (x, y مختصات داشته باشد) اجسام زمانی سه بعدی هستند که عمق داشته باشند.

* ۴ بعد بالا را فضا می نامیم. *

* در محور مختصات تمام نقطه هایی که مشخص شده به آن ها R^3 می گویند (x, y, z)



$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

۹۶.۱۱.۲۴

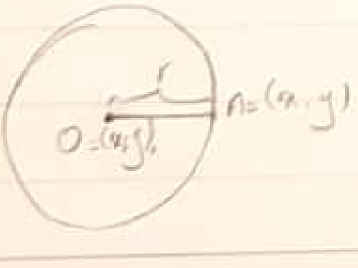
فصل ۰ (یادآوری بردارها):

ویژگی های بردار: ① اندازه ② جهت

با $\|\vec{v}\|$ نشان داده می شود، نرم (norm) خوانده می شود. فقط بردار صفر اندازه اش صفر است و بقیه بردارها ناصفر اند.

* برداری که اندازه‌ی آن برابر ۱ باشد به آن بردار یکه گویند *

مثال) دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به نام مرکز (مثلاً $O = (x_0, y_0)$) به فاصله‌ی ثابت به نام شعاع دایره (مثلاً r) باشند



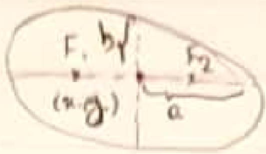
$$\overrightarrow{OA} = (x - x_0, y - y_0) \rightarrow \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

معادله‌ی استاندارد دایره به مرکز (x_0, y_0) و شعاع r

بیضی: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت همواره عددی ثابت باشد

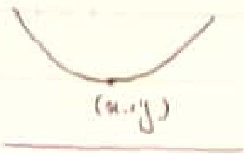
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



سهمی: مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از یک نقطه ثابت و یک خط ثابت همواره برابر باشد

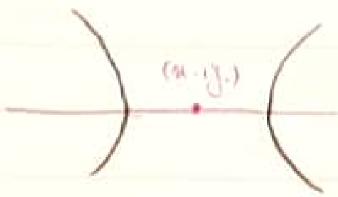
$$x-x_0=a(y-y_0)^2$$

$$y-y_0=b(x-x_0)^2$$

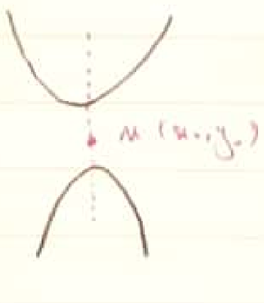


هذلولی: مجموعه نقاطی از صفحه که تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت همواره عددی ثابت باشد

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$



اعمال جبری بین بردارها: اگر $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$، k یک عدد ثابت و $\vec{O}(0,0,0)$ باشد:

1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

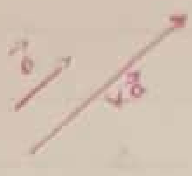
$-\vec{b}=(-b_1,\ -b_2,\ -b_3)$

2) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

3) $K.\vec{a} = (Ka_1, Ka_2, Ka_3)$

$\|-\vec{b}\| = \|\vec{b}\|$

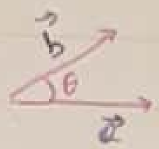
$\|K.\vec{a}\| = K\|\vec{a}\| \longrightarrow K\vec{a} \parallel \vec{a}$



$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \exists\, K \in \mathbb{R}$ st ; $\vec{b} = K\vec{a}$

existance ↲ (for $\exists$)   such that (for st)

4) $\vec{a}.\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$



$\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\| . \|\vec{b}\| . \cos\theta$ $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\| . \|\vec{b}\|}$

$\theta = 0 \longrightarrow \cos\theta = 1 \longrightarrow \vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\| . \|\vec{b}\|$

$\theta = \pi/2 \rightarrow \cos\theta = 0 \leftrightarrows \vec{a}.\vec{b} = 0$

$\theta = \pi \longrightarrow \cos\theta = -1 \longrightarrow \vec{a}.\vec{b} = -\|\vec{a}\| . \|\vec{b}\|$

$\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ $\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0)$
$+ a_3(0,0,1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ ترکیب استاندارد بردار $\vec{a}$

$T_p(\mathbb{R}^3) = \{ PQ \mid Q \in \mathbb{R}^3 \}$ فضای مماس بر $\mathbb{R}^3$ در نقطه P

* $\vec{a} = (\vec{a}.\vec{i})\vec{i} + (\vec{a}.\vec{j})\vec{j} + (\vec{a}.\vec{k})\vec{k}$ *

$\hookrightarrow \vec{a} = (\vec{a}.\vec{\alpha})\vec{\alpha} + (\vec{a}.\vec{\beta})\vec{\beta} + (\vec{a}.\vec{\gamma})\vec{\gamma}$

ماتریس :

$$A=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc}(1) & (2) & & (n)\end{array} \\ \begin{array}{c}(1)\\(2)\\ \\ \\(m)\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \end{array}$$

$$M_{n\times m}=\{A=[a_{ij}]_{n\times m} \mid a_{ij}\in\mathbb{R}$$

$$\det : M_{n\times n}\to\mathbb{R} \qquad n\in\mathbb{N}$$

$$\det[a]_{1\times1}=a$$

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=ad-bc$$

بسط طبق

$$A_{3\times3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \det A=(-1)^{1+1}a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3}a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

* اگر ماتریسی دارای یک سطر و یا یک ستون صفر باشد دترمینان صفر می‌شود. *
* اگر ماتریسی دارای دو سطر یا ستون یکسان باشد دترمینان صفر می‌شود. *
* اگر جای دو سطر یا دو ستون با هم عوض شوند حاصل دترمینان قرینه خواهد شد. *

ضرب خارجی :

$$\vec a(a_1,a_2,a_3) \quad , \quad \vec b(b_1,b_2,b_3)$$

بسط مطابق سطر اول :

$$\vec a\times\vec b=\det\begin{bmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec i-(a_1b_3-a_3b_1)\vec j+(a_1b_2-a_2b_1)\vec k$$

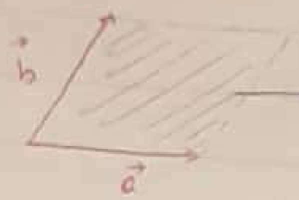
* $\vec a\times\vec b=-(\vec b\times\vec a)$ *

جهت $\vec a\times\vec b$:

به کمک قانون دست راست مشخص می‌شود یعنی اگر انگشتان دست راست را از $\vec a$ به $\vec b$ بچرخانیم انگشت شصت جهت $\vec a\times\vec b$ را نمایش می‌دهد پس

$$\vec a\times\vec b\perp\vec a \quad , \quad \vec a\times\vec b\perp\vec b$$

مساحت: $\vec{A}\times\vec{B}$ برابر است با عدد مساحت متوازی‌الاضلاعی که با $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ساخته می‌شود



$$\vec{A} = \|\vec{a}\times\vec{b}\|$$

$$\Rightarrow A = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\| \sin\theta$$

$$\Rightarrow * \|\vec{A}\times\vec{B}\| = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|.|\sin\theta| *$$

معادله خط و صفحه:

معادله خط:

یک نقطه: $A\,\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ از خط L و بردار هادی آن $\vec{n}=(a,b,c)$ که موازی خط L است داده شده:

$$L:\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} \qquad t\in R$$

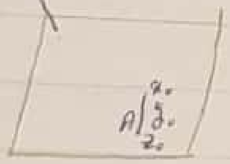
$B(x,y,z)$ هر نقطه‌ای که دلخواه در خط L

دو نقطه: $A\,\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ ، $B\,\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$ از خط داده شده باشد:

$$\vec{AB} = (x_1 - x_0 , y_1 - y_0 , z_1 - z_0)$$

$$L:\begin{cases} x = (x_1 - x_0)\,t + x_0 \\ y = (y_1 - y_0)\,t + y_0 \\ z = (z_1 - z_0)\,t + z_0 \end{cases}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$$



معادله صفحه:

معادله استاندارد صفحه: $* \; a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \; *$

تمرین: نشان دهید معادله صفحه گذرنده از سه نقطه $A\,\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ ، $B\,\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$ ، $C\,\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}$ از دستورالعمل

$$\det\begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{bmatrix} = 0$$

قابل دستیابی است که بسط دترمینان حتماً باید بر حسب سطر اول انجام گیرد

فصل ۱: تابع برداری

هر تابع به صورت

$$\begin{cases} \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ \alpha(t) = (x_1(t), (x_2)(t), \dots, x_n(t)) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

را یک تابع برداری می‌نامیم به ازای هر n، $t = 1, 2, \dots, n$ را تابع مؤلفه‌ای می‌نامند

مثال)

$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\alpha(t) = (t, \sin t) = t\vec{i}, \sin t\vec{j}$ $\qquad \alpha(\pi) = (\pi, 0)$

$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\beta(t) = \sqrt{t^2+1}\,\vec{i} + \dfrac{1}{\ln t}\vec{j} + \cos t\,\vec{k}$ $\qquad \beta(3) = \sqrt{10}\,\vec{i} + \dfrac{1}{\ln 3}\vec{j} + \cos 3\vec{k}$

* دامنه هر تابع برداری اشتراک دامنه توابع مؤلفه‌ای آن است.

$\alpha(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

$\Rightarrow D_\alpha = D_x \cap D_y \cap D_z$

مثال) مطلوبست محاسبه دامنه تابع

$\alpha(t) = \dfrac{1}{[t]-1}\vec{i} + \sqrt{3-t}\,\vec{j} + \ln(2t-1)\vec{k}$

$D_x = \mathbb{R} - [1, 2) = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$

$D_y = (-\infty, 3]$

$D_z = \ln(2t-1) \Rightarrow D_z = (\frac{1}{2}, +\infty)$

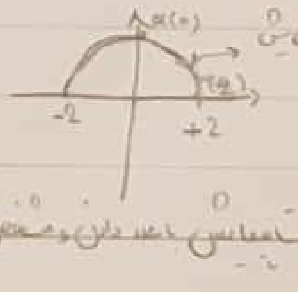
$\Rightarrow D_\alpha = D_x \cap D_y \cap D_z \Rightarrow [2, 3]$

* برای مشخص کردن برد توابع برداری سعی می‌کنیم بین توابع مؤلفه‌ای ارتباطی مشخص شده برقرار کنیم

مثال) برد توابع زیر را مشخص کنید

$T(\alpha) = t\vec{i} + \sqrt{4-t^2}\,\vec{j}$

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{4-t^2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = t^2 + 4 - t^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

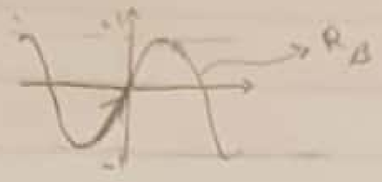


$D_\alpha = (-2, +2)$

* جهت حرکت منحنی با استفاده از مشخص کردن دامنه به دست می‌آید

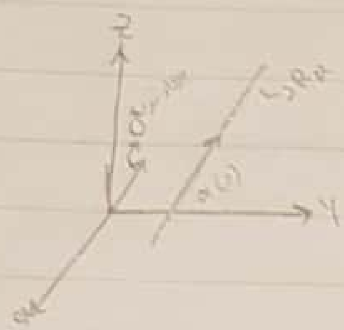
$\beta(t) = t\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sin t \end{cases} \longrightarrow y = \sin x$$



$\alpha(t) = (t+1)\vec{i} + (t+2)\vec{j} + (2t+1)\vec{k}$

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t+2 \\ z = 2t+1 \end{cases} \longrightarrow$$ این معادله پارامتری خطی با بردار هادی $(1, 1, 2)$ شامل نقطه $\alpha(0) = (1, 2, 1)$ هست



* می‌شه به جای این کار نقطه از معادله را مشخص کرد و سپس بردار را رسم کرد.

$\beta(t) = t^2\vec{i} + t\vec{j} + 3\vec{k}$

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t \\ z = 3 \end{cases} \longrightarrow x = y^2$$

$R_\beta = \{x, y, z \mid x = y^2,\ z = 3$

یک سهمی در xoy که به سمت راست است و در ارتفاع 3 می‌باشد.

* منحنی برد تابع برداری α را (خم α) می‌نامیم. این خم می‌تواند مسیر حرکت متحرک را نمایش دهد. در واقع در تابع

$$\alpha(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

مؤلفه‌های بردار $x(t), y(t), z(t)$ بردار مکان متحرک در لحظه t است.

هرگاه t به طور پیوسته از t_0 تا t_1 تغییر کند، متحرک از $\alpha(t_0)$ به $\alpha(t_1)$ حرکت کرده. جهت خم α از $\alpha(t_0)$ به سمت $\alpha(t_1)$ را جهت پیمایش خم α می‌گویند.

اعمال روی توابع برداری:

همه عملیات‌ها بین توابع برداری مانند بردارها براساس توابع مؤلفه‌ای انجام می‌شود $\alpha(t)=x_1(t)\vec{i}+y_1(t)\vec{j}$ و $\beta(t)=x_2(t)\vec{i}+y_2(t)\vec{j}$

تابع جمع برداری 1) $(\alpha\pm\beta)(t)=(x_1\pm x_2)(t)\vec{i}+(y_1\pm y_2)(t)\vec{j}$ ، $f:R\to R$ تابعی حقیقی می‌باشد.

ضرب عددی 2) $(f\alpha)(t)=(f)(t)\alpha(t)=(f(t)\cdot x_1(t))\vec{i}+(f(t)\cdot x_2(t))\vec{j}$

ضرب داخلی 3) $(\alpha\cdot\beta)(t)=x_1(t)\cdot x_2(t)+y_1(t)\cdot y_2(t)$

ضرب خارجی 4) $(\alpha\times\beta)(t)=\alpha(t)\times\beta(t)$

5

$\alpha\circ\beta$ وجود ندارد زیرا $R_\beta\not\subset D_\alpha$

$$(\alpha\circ f)(t)=\alpha(f(t))=(x_1\circ f)(t)\vec{i}+(y_1\circ f)(t)\vec{j}$$

$f\circ\alpha$ نیز وجود ندارد.

حد: حد یک تابع برداری در صورت وجود به برداری است که از حد توابع مؤلفه‌ای بدست می‌آید

$$\lim_{t\to a}\alpha(t)=(\lim_{t\to a}x_1(t))\vec{i}+(\lim_{t\to a}y_1(t))\vec{j}$$

مثال 4)

$$\lim_{t\to 0^+}\left[3t\left[\frac{1}{5t}\right]\vec{i}+\frac{\sin t}{t}\vec{j}\right]$$

$$\underbrace{\lim\left(3t\left[\frac{1}{5t}\right]\right)}_{\text{فشردگی}}\vec{i}+\underbrace{\lim\left(\frac{\sin t}{t}\right)}_{\text{هم‌ارزی}}\vec{j}\Rightarrow \frac{3}{5}\vec{i}+\vec{j}$$

پیوستگی:

تابع برداری $\alpha(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$ در $t=t_0$ پیوسته است هرگاه

1) $t_0\in D_\alpha$

2) $\lim_{t\to t_0}\alpha(t)$ موجود باشد

3) $\lim_{t\to t_0}\alpha(t)=\alpha(t_0)$

$\alpha(t)$ در $t=t_0$ پیوسته است اگر و تنها اگر توابع مؤلفه‌ای آن در $t=t_0$ پیوسته باشد

مشتق :

مشتق تابع برداری $\alpha(t)$ در t_0 برابر حد زیر است در صورت وجود

$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(t_0+h)-\alpha(t_0)}{h}$$

و آن را با $\alpha'(t_0)$ یا $\frac{d\alpha}{dt}(t_0)$ ..... نمایش می دهیم

$$\alpha(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \Rightarrow \alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right)\vec{j}$$

دیفرانسیل :

$$d\alpha = dx\vec{i} + dy\vec{j}$$

$$dx = x'(t)\,dt$$

$$dy = y'(t)\,dt$$

فرض کنید $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ دو تابع برداری و $f: R \to R$ تابع حقیقی باشند که مشتق پذیرند در اینصورت :

1) $(\alpha \pm \beta)'(t) = \alpha'(t) \pm \beta'(t)$

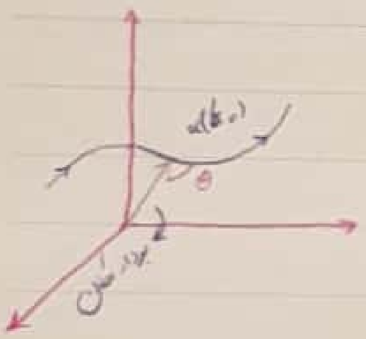
2) $(f\alpha)'(t) = f'(t)\cdot\alpha(t) + f(t)\cdot\alpha'(t)$

3) $(\alpha\cdot\beta)'(t) = \alpha'(t)\cdot\beta(t) + \alpha(t)\cdot\beta'(t)$

4) $(\alpha\times\beta)'(t) = \alpha'(t)\times\beta(t) + \alpha(t)\times\beta'(t)$

5) $(\alpha\circ f)'(t) = f'(t)\cdot\alpha'(f(t))$

تعبیر هندسی :



در تعبیر هندسی $\alpha'(t_0)$ بردار مماس بر خم α در نقطه $\alpha(t_0)$ در جهت پیمایش آن

هرگاه $\alpha(t)$ معادله حرکت یک متحرک باشد :

- $\alpha'(t)$ بردار سرعت متحرک است و با $V(t)$ نمایش می دهیم.

- $\alpha''(t)$ بردار شتاب متحرک است و با $a(t)$ نمایش می دهیم.

- $\|\alpha'(t)\|$ را تندی متحرک می گویند.

* خم را خمی با تندی واحد می‌نویسند هرگاه به ازای هر $t\in D_\alpha$ داشته باشیم: $\|\alpha'(t)\|=1$

* اگر θ زاویه‌ی بین بردار سرعت و بردار مکان در $t=t_0$ باشد، آنگاه: $\cos\theta = \frac{\alpha(t_0)\cdot\alpha'(t_0)}{\|\alpha(t_0)\|\,\|\alpha'(t_0)\|}$

نکته: هرگاه در مشتق ضرب داخلی توابع برداری قرار دهیم $\beta=\alpha$ در اینصورت:

$$(\alpha\cdot\alpha')' = \alpha'\cdot\alpha+\alpha\cdot\alpha' = 2\alpha\cdot\alpha' \xrightarrow{\alpha\cdot\alpha=\|\alpha^2\|} (\|\alpha\|^2)' = 2\alpha'\cdot\alpha$$

نتیجه: هرگاه $\|\alpha\|$ عدد ثابتی باشد آنگاه (بردار مشتق عمود است بر بردار اصلی) $2\alpha'\cdot\alpha=0 \to \alpha'(t)\perp\alpha(t)$

برای هر $t\in D_\alpha$ یعنی بردار سرعت در این خم‌ها بر بردار مکان عمود است

$\alpha(t)=t\vec{i}+\sqrt{1-t^2}\,\vec{j} \to \|\alpha\|=1$

اگر بردار یکه‌ی هم‌جهت با $\alpha'(t)$ بسازیم آن را بردار یکه مماس بر خم α می‌نویسند و با $T(t)$ نمایش می‌دهند

$$T(t)=\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

تعبیر هندسی خم:

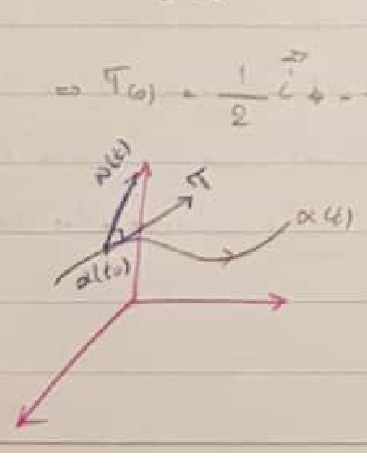
بنابه سطح قبل ملاحظه شد هرگاه $\alpha(t)$ یک تابع برداری باشد در $t=t_0$ مشتق‌پذیر است، آنگاه $\alpha'(t_0)$ برداری است مماس بر خم α در نقطه $\alpha(t_0)$ و در جهت پیمایش آن.

مثال) بردار یکه‌ی مماس بر خم $\alpha(t)=e^{t}\vec{i}+e^{-t}\vec{j}+\sqrt{2}\,t\vec{k}$ را در نقطه $\alpha(0)$ بیابید

$$\alpha'(t)=e^{t}\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+\sqrt{2}\vec{k} \to \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(e^t)^2+(-e^{-t})^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}$$
$$=\sqrt{(e^t+e^{-t})^2} = e^t+e^{-t}$$

$$\Rightarrow T(t)=\frac{e^{t}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{i}-\frac{e^{t}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{e^{t}+e^{-t}}\vec{k} \to T(0)=\frac{e^0}{e^0+e^0}\vec{i}-\frac{e^0}{e^0+e^0}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{e^0+e^0}\vec{k}$$

$$\Rightarrow T(0)=\frac{1}{2}\vec{i}+-\frac{1}{2}\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$



از آن جا که $T(t)$ تابعی برداری با اندازه ثابت است پس $T'(t)$ بر $T(t)$ عمود خواهد بود.

بردار یکه‌ی هم‌جهت با $T'(t)$ را بردار قائم برخم α در نقطه $\alpha(t)$ می‌نامیم و با $N(t)$ نمایش می‌دهیم

$$N(t)=\frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

بدیهی است که از ضرب خارجی $T(t_0)\times N(t)$ می‌توان بردار قائم دیگری برخم در نقطه $\alpha(t_0)$ بدست آورد. این را قائم دوم (Binormal) خم α در نقطه $\alpha(t_0)$ می‌نامیم و با $B(t_0)$ نمایش می‌دهیم

$$B(t_0)=T(t_0)\times N(t_0)$$

$$\|B\|=\|T\|\,.\,\|N\|\,.\,\sin\pi/2=1\times1\times1=1$$

سه بردار $\{T, N, B\}$ در نقطه $\alpha(t_0)$ یک کنج (دستگاه مختصات) می‌سازند که به آن کنج فرنه خم α در نقطه $\alpha(t)$ می‌گوییم

مثال) بردارهای کنج فرنه خم $\alpha(t)=\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\sqrt{3}t\,\vec{k}$ را در نقطه $\alpha(\pi/6)$ روی آن بیابید

$$T(t)=\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

$$\alpha'(t)=\cos(t)\,\vec{i}-\sin(t)\,\vec{j}+\sqrt{3}\,\vec{k}\rightarrow\|\alpha'(t)\|=\sqrt{(\cos t)^2+(-\sin t)^2+(\sqrt{3})^2}=2$$

$$T(t)=\tfrac{1}{2}\cos t\,\vec{i}-\tfrac{1}{2}\sin t\,\vec{j}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}\rightarrow T(\pi/6)=\tfrac{1}{2}\cos\pi/6\,\vec{i}-\tfrac{1}{2}\sin\pi/6\,\vec{j}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{i}-\tfrac{1}{4}\vec{j}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$$

$$N(t)=\frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}\longrightarrow T'(t)=-\tfrac{1}{2}\sin t\,\vec{i}-\tfrac{1}{2}\cos t\,\vec{j}+0\vec{k}$$

$$\|T'(t)\|=\sqrt{(-\tfrac{1}{2}\sin t)^2+(-\tfrac{1}{2}\cos t)^2+(0)^2}=\sqrt{1/4}=1/2$$

$$\Rightarrow N(t)=-\frac{1/2}{1/2}\sin t\,\vec{i}-\frac{1/2}{1/2}\cos t\,\vec{j}+\frac{0}{1/2}\vec{k}\Rightarrow N(t)=-\sin t\,\vec{i}-\cos t\,\vec{j}+0\vec{k}$$

$$\Rightarrow N(\pi/6)=-\sin(\pi/6)\,\vec{i}-\cos(\pi/6)\,\vec{j}+0\vec{k}\Rightarrow N(\pi/6)=-\tfrac{1}{2}\vec{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}+0\vec{k}$$

$$\rightarrow B(\pi/6) = T(\pi/6) \times N(\pi/6) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}$$

معادله صفحات کنج فرنه:

در کنج فرنه صفحه‌ای که شامل بردارهای T و N است را صفحه بوسان در نقطه $\alpha(t_0)$ خم α می‌نامیم بردار نرمال این صفحه $B(t_0)$ است. صفحه‌ای که شامل بردارهای $T(t_0)$ و $B(t_0)$ است و لذا بردار نرمال آن $N(t_0)$ می‌تواند باشد به صفحه راست‌کننده خم α در نقطه $\alpha(t_0)$ نامیده می‌شود. همچنین صفحه یعنی صفحه‌ای که شامل $N(t_0)$ و $B(t_0)$ است و در نتیجه $T(t_0)$ بردار نرمال برای آن است را صفحه قائم بر خم α در نقطه $\alpha(t_0)$ می‌نامیم.

مثال: در مثال قبل معادله صفحات کنج فرنه خم α را در نقطه $\alpha(\pi/6)$ بنویسید.

$$\alpha(t) = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \sqrt{3}\,t\,\vec{k}$$

$$\alpha(\pi/6) = \sin\pi/6\,\vec{i} + \cos\pi/6\,\vec{j} + \sqrt{3}\,\pi/6\,\vec{k} \Rightarrow \alpha(\pi/6) = (\underbrace{1/2}_{x_0}, \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{y_0}, \underbrace{\frac{\sqrt{3}\pi}{6}}_{z_0})$$

معادله صفحه: $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

صفحه بوسان: $\vec{n} = B(\pi/6) = \underbrace{3/4}_{a}\vec{i} - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}}_{b}\vec{j} - \underbrace{\frac{1}{2}}_{c}\vec{k}$

$$\Rightarrow 3/4(x - 1/2) - \frac{\sqrt{3}}{4}(y - \frac{\sqrt{3}}{2}) - 1/2(z - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}) = 0$$

صفحه راست‌کننده: $\vec{n} = N(\pi/6) = \underbrace{-1/2}_{a}\vec{i} - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{b}\vec{j} + \underbrace{0}_{c}\vec{k}$

$$\Rightarrow -1/2(x - 1/2) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y - \frac{\sqrt{3}}{2}) + 0(z - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}) = 0$$

صفحه قائم: $\vec{n} = T(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{4}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{4}(y - \frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(z - \frac{\sqrt{3}\pi}{6}) = 0$$

* تذکر: بردارهای تابع فرنه را در یک ماتریس قرار دهیم به طوری که سطر اول مولفه‌های $T(t_0)$ سطر دوم مولفه‌های $N(t_0)$ و سطر سوم مولفه‌های $B(t_0)$ باشد، آنگاه همین ماتریس، ماتریس فرنه خم α در نقطه (t_0) نامیده شده و با $F_\alpha(t_0)$ نمایش داده می‌شود. از این ماتریس در تبدیل مختصات استفاده می‌کنیم.

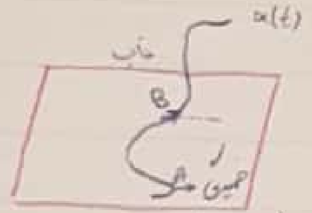
مثال) در مثال اخیر دترمینان ماتریس فرنه را بیابید.

$$F_\alpha(\pi/6) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{matrix}$$

$-\frac{9}{16}$, 0 , $-\frac{1}{16}$, $\frac{3}{16}$, 0 , $\frac{3}{16}$

روش ساروس

$$\det F_\alpha(\pi/6) = \left(\frac{3}{16} + 0 + \frac{3}{16}\right) - \left(-\frac{9}{16} + 0 - \frac{1}{16}\right) = \frac{16}{16} = 1$$



* پیچ و خم‌های یک منحنی دلخواه به صورت مثل هستند

همان‌طور که در شکل می‌بینیم، در یک همسایگی از نقطه A روی خم α قوس منحنی درون یک صفحه خاص قرار می‌گیرد، می‌گوییم منحنی در نقطه A خمیده است. اما اگر در نقطه‌ای مانند B، قوس منحنی باعث خارج شدن منحنی از صفحه باشد، می‌گوییم منحنی در B تاب دارد. خمیدگی و تاب خم در نقطه $\alpha(t_0)$ را به ترتیب با $K(t_0)$ و $\tau(t_0)$ نمایش می‌دهیم

کاپا kappa
تاو Tau

$$\star\ K(t_0) = \frac{\|T'(t_0)\|}{\|\alpha'(t_0)\|} \star \geq 0$$

$$\star\ \tau(t_0) = \frac{\|B'(t_0)\|}{\|\alpha'(t_0)\|} \star \geq 0$$

قضیه: خم تابع برداری α یک مارپیچ است اگر و تنها اگر $\frac{\tau}{k}$ همواره عددی ثابت باشد.

مثال) نشان دهید خم تابع برداری $\alpha(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$ یک مارپیچ است. (a, b اعداد ثابت)

$$\alpha'(t) = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\,\vec{i} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\,\vec{j} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{k}$$

$$T'(t) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos t\, \vec{i} - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin t\, \vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\Rightarrow \|T'(t)\| = \sqrt{\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos t\right)^2 + \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin t\right)^2 + 0^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$k(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{a/\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ ✓ خمیدگی 8

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}} \cos t\, \vec{i} - \frac{\cancel{a}/\sqrt{a^2+b^2}}{a/\sqrt{a^2+b^2}} \sin t\, \vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\Rightarrow N(t) = -\cos t\, \vec{i} - \sin t\, \vec{j} + 0\vec{k}$$

$$B(t) = T(t) \times N(t) \quad \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin t & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos t & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{bmatrix} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin t\, \vec{i} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos t\, \vec{j} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \vec{k}$$

$$\rightarrow B'(t) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos t\, \vec{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin t\, \vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\Rightarrow \|B'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos t\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin t\right)^2 + 0^2} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \tau(t) = \frac{\|B'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

$$\rightarrow \frac{\tau}{k} = \frac{b/a^2+b^2}{a/a^2+b^2} = b/a$$ مقدار ثابت

مثال) فرمول های فرنه را وقتی α خمی با سرعت واحد باشد (یعنی $\|\alpha'(t)\| = 1$) بازنویسی کنید

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \xrightarrow{\|\alpha'(t)\|=1} T(t) = \alpha'(t)$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}$$

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \alpha'(t) \times \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|} = \frac{(\alpha' \times \alpha'')(t)}{\|\alpha''(t)\|}$$

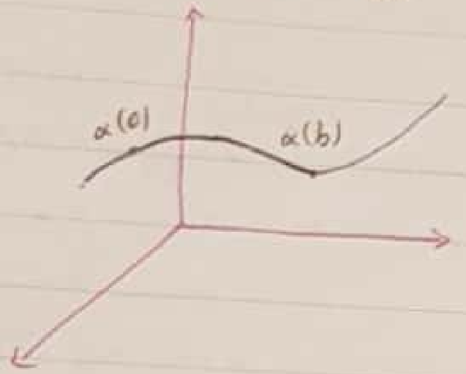
$K(t) = \|T'(t)\| = \|\alpha''(t)\|$

$$\tau(t) = \frac{\|B'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} = \|B'(t)\|$$

مسافت پیموده شده (طول خم):

از آن جا که هر تابع برداری $\alpha(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ را می توان به عنوان یک تابع پارامتری در نظر گرفت طول خم توابع برداری مانند طول منحنی های پارامتری محاسبه می شود یعنی به ازای $t \in (a,b)$ طول منحنی از خم α که بین $\alpha(a)$, $\alpha(b)$ قرار می گیرد از رابطه ی

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \Rightarrow * S = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt *$$



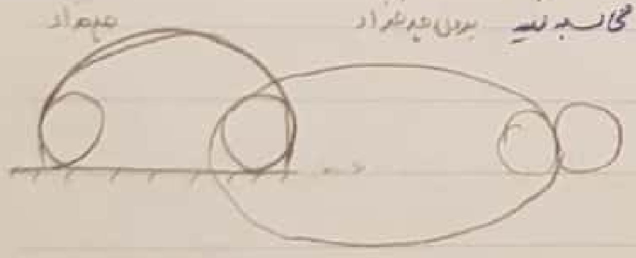
مثال) طول مارپیچ مستدیر $\alpha(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$ را به ازای $t \in [0, 2\pi]$ محاسبه کنید

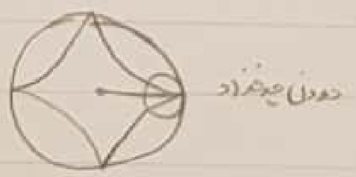
$\alpha'(t) = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\vec{k}$

$$\Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + (b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\, dt = \sqrt{a^2+b^2}\, dt \Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$$

مثال) طول خم تابع برداری $\beta(t) = \sin^3 t\,\vec{i} + \cos^3 t\,\vec{j}$ را به ازای $t \in [0, \pi/2]$ محاسبه کنید





* منحنی های چرخزاد:

$$\beta'(t) = 3\cos t\sin^2 t\,\vec{i} - 3\sin t\cos^2 t\,\vec{j}$$

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{(3\cos t\sin^2 t)^2 + (-3\sin t\cos^2 t)^2} = \sqrt{9\cos^2 t\sin^4 t + 9\sin^2 t\cos^4 t}$$

$$= \sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t\,(\sin^2 t + \cos^2 t)} = 3|\cos t\sin t|$$

$$\rightarrow S = \int_0^b \|\beta'(t)\|\,dt = 3\int_0^{\pi/2} |\cos t\sin t|\,dt \xRightarrow{0 \le t \le \pi/2} 3\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t\,dt = \tfrac{3}{2}\sin^2 t\Big|_{t=0}^{t=\pi/2}$$

$$= 3/2$$

تابع طول قوس:

گاهی اوقات با شروع از یک مبدأ زمانی لازم است مسافت پیموده شده توسط یک متحرک را پس از طی زمان‌های مختلف محاسبه کنیم
در این مواقع بهتر است به جای محاسبه طول خم تابعی تحت عنوان تابع طول قوس داشته باشیم که در هر لحظه از حرکت بتواند مسافت
پیموده شده را محاسبه نماید.

در تابع برداری $\alpha(t)$ با شروع از مبدأ زمانی $t=a$ تابع $S(x) = \int_a^x \|\alpha'(t)\|dt$ را تابع طول قوس خم α می‌نامیم که متغیر زمان است

مثال) تابع طول قوس خم $\alpha(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + \sqrt{2}t\vec{k}$ را با شروع از $t=0$ را بیابید

$$\alpha'(t) = e^t\vec{i} - e^{-t}\vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$$

$$\rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(e^t)^2 + (-e^{-t})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}$$

$$\rightarrow S(x) = \int_0^x \|\alpha'(t)\|\,dt = \int_0^x (e^t + e^{-t})\,dt = (e^t + e^{-t})\Big|_{t=0}^{t=x} = (e^x - e^{-x}) - (1-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{S(x) = e^x - e^{-x}}$$ تابع طول قوس

بدیهی است تابع طول قوس همواره تابعی صعودی و لذا وارون پذیر است

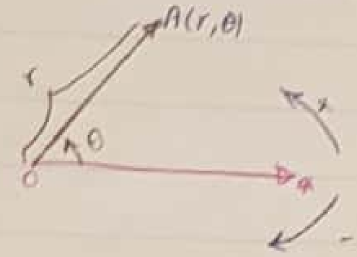
* می‌توان نشان داد که اگر $\vec{r}(t)$ تابع شکل منحنی ... $a(t)$ باشد آنگاه $\vec{a}(t)$ ($a \cdot \vec{T}$) همواره عمود بر منحنی با تندی واحد خواهد بود. *

دستگاه مختصات قطبی

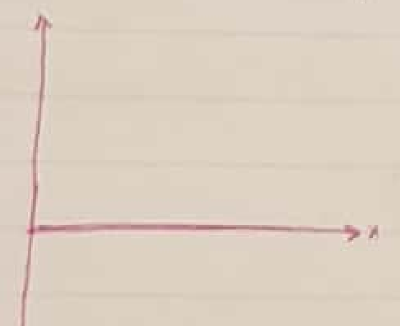
این دستگاه از یک نیم‌خط مانند $\vec{Ox}$ تشکیل می‌شود. ابتدای نیم‌خط یعنی O را قطب یا مبدأ و خود نیم‌خط را محور قطبی یا شعاع $\theta=0$ می‌گویند. هرگاه A نقطه‌ای در صفحه باشد به طوری که زاویه مثلثاتی OA با Ox برابر با θ و نیز $\overline{OA}=r$، آنگاه زوج (r,θ) را مختصات قطبی نقطه A می‌گویند.

چون θ مثلثاتی است می‌تواند مثبت یا منفی یا بیش از 2π باشد و اندازه است یعنی می‌تواند + یا - باشد پس مختصات یک نقطه در دستگاه قطبی منحصر به فرد نیست.

حقیقتاً یک ضلع زاویه θ، $\vec{Ox}$ است. ضلع دومی که زاویه θ را مشخص می‌کند را می‌توان جهت مثبت یک محور در نظر گرفت که مبدأ آن در قطب است. + یا - بودن r روی این محور شناسایی می‌شود.

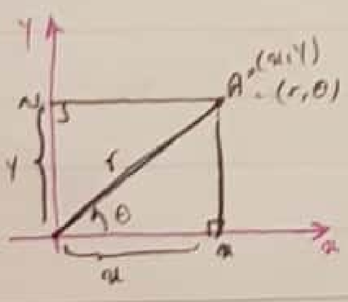


مثال) مختصات‌های زیر را در دستگاه قطبی نمایش دهید: $A=(3,\frac{\pi}{6})$ ، $B=(-1,\pi/2)$ ، $C=(-1,-\frac{\pi}{2})$ ، $D=(1,\frac{3\pi}{2})$



ارتباط بین دستگاه‌های مختصات قطبی و دکارتی:

مختصات قطبی و دکارتی را یکجا رسم کنیم به طوری که نیم محور قطبی روی جهت مثبت محور xها قرار گیرد و قطب و مبدأ بر هم منطبق شود.



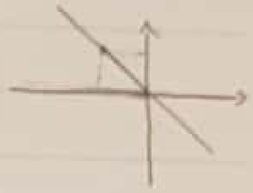
فرض کنید نقطه A دارای مختصات دکارتی (x,y) و قطبی (r,θ) باشد در شکل مقابل

$$\triangle OAM \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{MA}{OA} = \dfrac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad ①$$

علاوه بر این در این حالت

$$\text{رابطه فیثاغورث} \begin{cases} x^2+y^2 = r^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad ②$$

مثال) مختصات قطبی نقطه $A=(-1,1)$ را بیابید



$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1 \longrightarrow \theta = -\pi/4$$

$$r^2 = x^2+y^2 = (-1)^2+(1)^2 = 2 \longrightarrow r = \pm\sqrt{2} \longrightarrow A = (-\sqrt{2}, \pi/4)$$

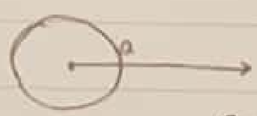
از روابط ①، ② برای تبدیل ضابطه توابع از یک دستگاه مختصات به دیگری نیز استفاده می‌کنیم

مثال) منحنی های دکارتی را به قطبی و بالعکس ببرید.

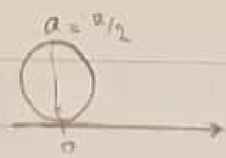
1) $y=x \rightsquigarrow \dfrac{y}{x}=1 \longrightarrow \tan\theta = 1 \rightsquigarrow \theta = \pi/4$

2) $x=a \rightsquigarrow r\cos\theta = a \longrightarrow r = \dfrac{a}{\cos\theta}$

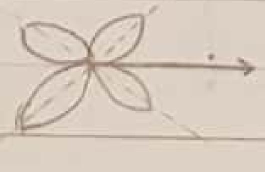
3) $x^2+y^2=a^2 \rightsquigarrow r^2=a^2 \longrightarrow r=a$



4) $r=a\sin\theta \xrightarrow{\times r} r^2 = ar\sin\theta \to x^2+y^2=ay$



5) $r\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \xrightarrow{\times r^2} r^3 = 2(r\sin\theta)(r\cos\theta) \longrightarrow (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2} = 2xy$

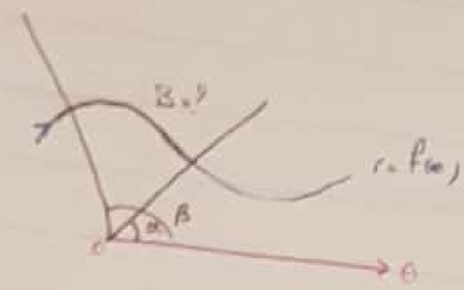


$r=\sin 2\theta$

اثبات فرمول طول قوس در مختصات قطبی

نشان دهید طول قوس منحنی $r=f(\theta)$ که بین زوایای $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ $(\alpha<\beta)$ قرار دارد از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f(\theta))^2+(f'(\theta))^2}\,d\theta$$



ابتدا منحنی را به مختصات دکارتی می‌بریم

$$\begin{cases} x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta \\ y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta \end{cases} \longrightarrow \alpha(\theta)=x(\theta)\vec{i}+y(\theta)\vec{j}$$

$$=f(\theta)\cos\theta\,\vec{i}+f(\theta)\sin\theta\,\vec{j}$$

$\alpha\leq\theta\leq\beta$

اکنون براساس آنچه در مختصات دکارتی گفتیم:

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\|\alpha'(\theta)\|\,d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

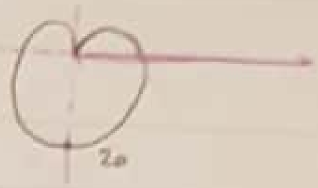
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta)^2+(f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f'(\theta))^2\cos^2\theta-2f'(\theta)f(\theta)\cos\theta\sin\theta+(f(\theta))^2\sin^2\theta+(f'(\theta))^2\sin^2\theta+2f'(\theta)f(\theta)\sin\theta\cos\theta+(f(\theta))^2\cos^2\theta}$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f'(\theta))^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}+(f(\theta))^2\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{1}}\,d\theta=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f'(\theta))^2+(f(\theta))^2}\,d\theta$$

$$\Rightarrow S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(f'(\theta))^2+(f(\theta))^2}\,d\theta$$

مثال: طول قسمتی از منحنی تابع قطبی $r=a(1-\sin\theta)$ را بین زوایای $\theta=-\pi/2$ و $\theta=\pi/2$ محاسبه نمایید.



$$S=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{(f(\theta))^2+(f'(\theta))^2}\,d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{[a(1-\sin\theta)]^2+[-a\cos\theta]^2}\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{a^2(1-2\sin\theta+\sin^2\theta)+a^2\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{2a^2-2a^2\sin\theta}\,d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\sin\theta}\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}\,a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin\theta}\,d\theta\Longrightarrow\sqrt{2}\,a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sqrt{1+\sin\theta}}\,d\theta$$

$$=\sqrt{2}\,a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos^2\theta}}{\sqrt{1+\sin\theta}}\,d\theta=4a$$